

LISTA DE EXERCÍCIOS - TEORIA DOS NÚMEROS - MATEMÁTICA

1 Congruência módulo n

Exercício 1.1. *Determine os restos das divisões de*

1. 3^{1000} por 101
2. $5^{3^{20}}$ por 13

Exercício 1.2. *Em um artigo publicado em 1969, D. J. Lewis afirmava que a equação $x^3 - 117y^3 = 5$ tem no máximo 18 soluções inteiras. Prove que essa equação não admite solução em \mathbb{Z} . (Dica: use o fato de que 117 é divisível por 9).*

Exercício 1.3. *Demonstre que a relação de congruência módulo n é uma relação de equivalência.*

Exercício 1.4. *Considere a seguinte congruência:*

$$a \equiv b \pmod{5}$$

Determine as classes de equivalência obtida dessa congruência.

Exercício 1.5. *Se p é primo, então as únicas soluções de $x^2 = \bar{1}$ em \mathbb{Z}_p são $\bar{1}$ e $-\bar{1}$.*

Exercício 1.6. *Mostre que \mathbb{Z}_n , munido da multiplicação, é um grupo abeliano.*

Exercício 1.7. *Mostre que \mathbb{Z}_p é um corpo se, e somente se p é primo.*

Exercício 1.8. *Mostre que se p é primo, então em \mathbb{Z}_p temos*

$$(\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a}^p + \bar{b}^p$$

para quaisquer $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$.

(Dica: Utilize o binômio de Newton)